

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Аналитическая теория чисел с элементами геометрии чисел
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: А.А. Илларионов, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 15.04.2024

Аннотация

Аналитическая теория чисел — это раздел теории чисел, который изучает количественные аспекты различных объектов арифметического происхождения при помощи аналитических методов. Геометрия чисел занимается применением в теории чисел геометрических понятий и методов. В первой части этого курса мы обсудим доказательства таких классических фактов, как асимптотический закон распределения простых чисел и теорема Дирихле о простых в арифметических прогрессиях, рассмотрим связь между дзета-функцией Римана и распределением простых, научимся использовать метод комплексного интегрирования. Во второй части мы изучим некоторые вопросы, связанные отклонением последовательностей от равномерного распределения (теорема Рота), а также поймем, как теория чисел может использоваться для приближенных методов (теоретико-числовой метод Коробова).

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Получение студентами представления о классических результатах аналитической теории чисел.

Задачи дисциплины

Развитие у студентов навыков, необходимых для работы в области теории чисел.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- основные формулы и методы суммирования;
- свойства теоретико-числовых функций;
- основные результаты о распределении простых чисел;
- методы исследования равномерного распределения последовательностей.

уметь:

- выводить асимптотические формулы для сумм;
- получать точные оценки арифметических функций;
- использовать метод комплексного интегрирования;
- исследовать вопросы о равномерном распределении последовательностей.

владеть:

- получения асимптотических формул и оценок для сумм значений арифметических функций;
- исследования сложности теоретико-числовых алгоритмов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Арифметические функции.	5	5		15
2	Распределение простых.	5	5		15
3	Дальнейшие результаты о распределении простых.	5	5		15
4	Метод решета	5	5		10
5	Равномерное распределение	5	5		10
6	Теоретико-числовый метод Коробова	5	5		10
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

1. Арифметические функции.

Мультипликативные функции. Свертки Дирихле и формулы обращения Мебиуса. Оценки роста основных арифметических функций (число и сумма делителей, функция Эйлера). Формулы суммирования. Средние значения основных арифметических функций. Проблема делителей Дирихле и проблема круга.

2. Распределение простых.

Характеры Дирихле. Дзета-функция и L-функции Дирихле. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. Свойства дзета-функции Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел (АЗРП). Тесты простоты*

3. Дальнейшие результаты о распределении простых.

Целые функции и произведение Вейерштрасса. Гамма-функция Эйлера. Функциональное уравнение для дзета-функции (продолжение на всю комплексную плоскость). Теорема Валле-Пуссена о нулях дзета-функции. Оценка остаточного члена в АЗРП. Выражение количества простых чисел через нули дзета-функции. Гипотеза Римана. Условные результаты (если гипотеза Римана верна). Теорема Зигеля – Вальфиша*.

4. Метод решета

Решето Бруна и проблема простых близнецов. Решето с весом и бинарная проблема Гольбаха.

5. Равномерное распределение

Критерии Вейля равномерного распределения последовательностей. Тригонометрические суммы и дискретное преобразование Фурье. Уточнение остаточного члена в проблеме делителей Дирихле. Отклонение последовательностей от равномерного распределения. Теорема Рота. Открытые проблемы.

6. Теоретико-числовой метод Коробова

Сетки Коробова. Отклонение от равномерного распределения. Квадратурные формулы Коробова и их погрешность. Открытые проблемы.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Основы теории чисел [Текст] : учебник для вузов / И. М. Виноградов .— 6-е изд., испр. — М. : Гостехиздат, 1953 .— 180 с.
 2. Введение в теорию алгебраических чисел [Текст]/М. М. Постников, -М., Наука, 1982
 3. Основы теории чисел [Текст], монография/А. Вейль , -М., Мир, 1972
Виноградов, И. М.
Основы теории чисел [Электронный ресурс] : учеб. пособие / И. М. Виноградов .— 13-е изд., стереотип. — СПб. : Лань, 2019 .— (Классическая учебная литература по математике) .— Электрон. версия печ. публикации .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).
- [] Детальная информация]

А.А. Карацуба, С.М. Воронин, Дзета-функция Римана

Дополнительная литература

1. Вычислительно сложные задачи теории чисел [Текст] : учеб. пособие для вузов / Е. А. Гречников [и др.] ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова .— М. : Изд-во Моск. ун-та, 2012 .— 312 с.
2. Основы аналитической теории чисел [Текст]/А. А. Карацуба, -М., Наука, 1975

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения дисциплины, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы и составление конспектов по ней;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	<u>4</u>
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: А.А. Илларионов, д-р физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Аналитическая теория чисел с элементами геометрии чисел» обучающийся должен:

знать:

- основные формулы и методы суммирования;
- свойства теоретико-числовых функций;
- основные результаты о распределении простых чисел;
- методы исследования равномерного распределения последовательностей.

уметь:

- выводить асимптотические формулы для сумм;
- получать точные оценки арифметических функций;
- использовать метод комплексного интегрирования;
- исследовать вопросы о равномерном распределении последовательностей.

владеть:

- получения асимптотических формул и оценок для сумм значений арифметических функций;
- исследования сложности теоретико-числовых алгоритмов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Свертки Дирихле, формулы обращения Мебиуса, свойства основных арифметических функций.

2. Оценки роста основных арифметических функций
3. Средние значения арифметических функций
4. Характеры Дирихле
5. Дзета-функция Римана, продолжение на $\text{Re} > 0$, простейшие оценки и свойства
6. L-функции Дирихле
7. Теорема Дирихле о простых в арифметических прогрессиях
8. Оценки дзета-функции и ее производной. Отсутствие нулей на прямой $\text{Re} = 1$.
9. АЗРП (без оценки остаточного члена)
10. Тесты простоты

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Гамма-функция Эйлера и ее основные свойства
2. Функциональное уравнение для дзета-функции Римана
3. Теорема Валле Пуассона о нулях дзета-функции Римана
4. Оценка остаточного члена в АЗРП.
5. Связь между количеством простых в заданном промежутке и нулями дзета-функции
6. Решето Бруна и проблема простых близнецов.
7. Решето с весом и бинарная проблема Гольбаха.
8. Критерии Вейля равномерного распределения последовательности
9. Приложение критериев Вейля. Уточнение остаточного члена в проблеме делителей Дирихле. Дискретное преобразование Фурье.
10. Теорема Рота об отклонении многомерной последовательности от равномерного распределения.
11. Сетки Коробова. Верхняя оценка для их отклонения от равномерного распределения.
12. Погрешность квадратурных формул Коробова.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.